L'objet de ce problème est d'étudier les applications Lipschitziennes, non linéaires en général, entre espaces vectoriels normés. Le problème est divisé en six parties. Les quatre premières parties sont indépendantes.

- Dans tout le problème, on considère des $\mathbf{R}$- espaces vectoriels normés, dont la norme sera notée $\| . \|$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. La droite réelle $\mathbf{R}$ sera toujours munie de la valeur absolue $| . |$.

- Si X et Y sont deux espaces vectoriels normés et $f : X \to Y$ est linéaire continue, on note

$$\|f\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

On dit que $\Phi : X \to Y$ est une isométrie si $\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| = \|x_1 - x_2\|$ pour tout couple $(x_1, x_2) \in X^2$. On notera qu'une telle isométrie n'est pas nécessairement linéaire.

- Soit M un nombre réel positif. Une application $F : X \to Y$ est dite M-Lipschitzienne si

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leqslant M\|x_1 - x_2\|$$

pour tout couple $(x_1, x_2) \in X^2$. Une application Lipschitzienne est une application qui, pour un certain $M \geqslant 0$, est M-Lipschitzienne.

- Un espace normé X est dit séparable s'il contient une suite dense, ou en d'autres termes une partie dénombrable dense.

- Pour tout espace normé X, on note X^* l'espace dual de X, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues de X dans $\mathbf{R}$. Pour tout couple $(x^*, x) \in X^* \times X$, on note $x^*(x) =< x^*, x >$. Conformément aux notations ci-dessus, on note

$$\|x^*\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|< x^*, x >|}{\|x\|}.$$

On rappelle que l'espace dual X^* muni de cette norme est un espace de Banach. On notera simplement X^{**} l'espace $(X^*)^*$.

- L'espace vectoriel engendré par une partie A d'un espace normé X sera noté $vect[A]$, et sa fermeture sera notée $\overline{vect}[A]$.

- Soit C une partie convexe d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel X. On dit que $g : C \to \mathbf{R}$ est convexe si pour tous $(t_1, t_2, ..., t_n, x_1, x_2, ..., x_n) \in [0,1]^n \times C^n$ tels que $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$, on a

$$g(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i g(x_i).$$

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On définit sur $\mathbf{R}^n$ la norme $\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

- Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $x \in \Omega$ et $g : \Omega \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable en x. On note $\{\nabla g\}(x)$ la différentielle de g au point x. Cette différentielle $\{\nabla g\}(x)$ est donc une forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$.

- On rappelle le lemme de Baire : si P est un espace métrique complet et si pour tout entier $j \geqslant 1$, V_j est un sous-ensemble ouvert et dense de P, alors l'ensemble $\bigcap_{j \geqslant 1} V_j$ est dense dans P.

- On rappelle enfin que

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

.

I. PRÉLIMINAIRES

1. Soient E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach, A une partie dense de E et $f : A \to F$ une application M-Lipschitzienne. Montrer qu'il existe une unique application M-Lipschitzienne $\widetilde{f} : E \to F$ telle que pour tout $a \in A$, on ait $\widetilde{f}(a) = f(a)$ (pour $x \in E$, on pourra considérer une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x, et montrer que la suite $(f(a_n))$ est de Cauchy).

2. Soit $n \geqslant 1$. On définit $\gamma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ par

$$\gamma(x_1, x_2, ..., x_n) = exp(-\pi(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)).$$

a. Montrer que γ est intégrable sur $\mathbf{R}^n$ et que l'on a pour tout entier $p \geqslant 1$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \gamma(u_1, u_2, ..., u_n) du_1 du_2 ... du_n = \int_{\mathbf{R}^n} p^n \gamma(pt_1, pt_2, ..., pt_n) dt_1 dt_2 ... dt_n = 1.$$

Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction Lipschitzienne. Pour tout entier $p \geqslant 1$, on pose

$$g_p(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{\mathbf{R}^n} p^n \gamma(pt_1, pt_2, ..., pt_n) f(x_1 - t_1, x_2 - t_2, ..., x_n - t_n) dt_1 dt_2 ... dt_n.$$

b. Montrer que la fonction g_p est bien définie pour tout $p \geqslant 1$, et que la suite de fonctions $(g_p)_{p\geqslant 1}$ converge vers f uniformément sur $\mathbf{R}^n$.

c. Montrer que pour tout $p \geqslant 1$, la fonction g_p est continûment différentiable sur $\mathbf{R}^n$ (on pourra effectuer le changement de variable $v_1 = x_1 - t_1, ..., v_n = x_n - t_n$).

d. Soit E un espace normé de dimension finie non réduit à $\{0\}$. On désigne par $Lip_0(E)$ l'espace des fonctions Lipschitziennes f de E dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in Lip_0(E)$, on pose

$$\|f\|_L = sup\{\frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|}\ ;\ (x, y) \in E^2,\ x \neq y\}.$$

Montrer que pour toute fonction $f \in Lip_0(E)$, il existe une suite $(h_p)_{p\geqslant 1} \subset Lip_0(E)$ de fonctions continûment différentiables sur E telles que $\|h_p\|_L \leqslant \|f\|_L$ pour tout p, et telles que la suite $(h_p)_{p\geqslant 1}$ converge vers f uniformément sur E.

II. ISOMÉTRIES ET LINÉARITÉ.

1. On munit dans cette question seulement l'espace $\mathbf{R}^2$ de la norme $\|(x, y)\|_\infty = max\{|x|, |y|\}$. Soit $f : (\mathbf{R}, |\ .\ |) \to (\mathbf{R}^2, \|\ .\ \|_\infty)$ définie par $f(t) = (t,\ sin(t))$. Montrer que f est une isométrie non linéaire.

2. Soit $\mathscr{H}$ un espace préhilbertien, dont la norme est notée $\|\ .\ \|_2$.

a. Soient x et y deux points de $\mathscr{H}$ et $t \in]0, 1[$ tels que $\|x\|_2 = \|y\|_2 = \|tx + (1 - t)y\|_2$. Montrer qu'alors $x = y$.

b. Soient x_1, x_2 et x_3 trois vecteurs de $\mathscr{H}$ tels que $x_1 = x_2 + x_3$ et $\|x_1\|_2 = \|x_2\|_2 + \|x_3\|_2$. Montrer qu'il existe un réel $\lambda \geqslant 0$ tel que $x_2 = \lambda x_1$ (on pourra se ramener au cas où les (x_i) sont non nuls et considérer les vecteurs normalisés $((\|x_i\|_2^{-1} x_i))$.

c. Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathscr{H}$ une isométrie telle que $\varphi(0) = 0$. Établir que $\varphi(t) = t\varphi(1)$ pour tout $t \geqslant 0$.

d. Soit Y un espace normé, et $\phi : Y \to \mathscr{H}$ une isométrie telle que $\phi(0) = 0$. Montrer que pour tout couple de vecteurs (x, y) dans Y et tout $t \geqslant 0$, on a $\phi(x + ty) = (1 - t)\phi(x) + t\phi(x + y)$.

e. Montrer que ϕ est une application linéaire de Y dans $\mathscr{H}$.

III. DUALITÉ DES ESPACES NORMÉS

1. Soit X un espace normé, H un hyperplan de X, et $u \in X \backslash H$. Soit $h^* \in H^*$ de norme égale à 1. Montrer que

$$\sup_{h_1 \in H} [< h^*, h_1 > - \|h_1 - u\|] \leqslant \inf_{h_2 \in H} [< h^*, h_2 > + \|h_2 - u\|].$$

2. Soit $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$\sup_{h_1 \in H} [< h^*, h_1 > - \|h_1 - u\|] \leqslant a \leqslant \inf_{h_2 \in H} [< h^*, h_2 > + \|h_2 - u\|].$$

a. On définit $x^* : X \to \mathbf{R}$ comme suit : pour tout $(h, t) \in H \times \mathbf{R}$, $< x^*, h + tu >=< h^*, h > + ta$. Montrer que $x^* \in X^*$ et que $\|x^*\| = 1$.

b. Soit E un espace normé de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que pour tout $x^* \in F^*$, il existe $y^* \in E^*$ tel que $\|y^*\| = \|x^*\|$ et tel que $< y^*, x >=< x^*, x >$ pour tout $x \in F$.

Dans toute la suite de cette partie, X désignera un espace normé de dimension infinie, supposé séparable. On notera $(x_n)_{n \geqslant 1}$ une suite dense dans X.

3. Soit $x \in X$.

a. Montrer qu'il existe une suite croissante $(E_k)_{k \geqslant 0}$ de sous-espaces de dimension finie de X tels que $x \in E_0$ et tels que la réunion $V = \bigcup_{k \geqslant 0} E_k$ soit dense dans X.

b. Montrer qu'il existe $v^* \in V^*$ de norme 1 tel que $< v^*, x >= \|x\|$ (on pourra utiliser le III.2.b)).

c. Montrer qu'il existe $x^* \in X^*$ de norme 1 tel que $< x^*, x >= \|x\|$.

4. Soit $J_X : X \to X^{**}$ définie pour tout $(x, x^*) \in X \times X^*$ par $< J_X(x), x^* >=< x^*, x >$. Montrer que J_X est une isométrie linéaire.

5. a. Soit $(x_n^*)_{n \geqslant 1}$ une suite de X^* telle que $\|x_n^*\| \leqslant 1$ pour tout n. Montrer qu'il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)}^*)$ de (x_n^*) telle que

$$\lim_{n \to \infty} < x_{\phi(n)}^*, x_k >$$

existe pour tout $k \geqslant 1$.

b. Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} < x_{\phi(n)}^*, z >$$

existe pour tout $z \in X$.

c. On pose $< x^*, z >= \lim_{n \to \infty} < x_{\phi(n)}^*, z >$. Montrer que l'application x^* ainsi définie est une forme linéaire et que $\|x^*\| \leqslant 1$.

6. Soit $j : \mathbf{R} \to X$ une isométrie telle que $j(0) = 0$.

a. Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $x_k^* \in X^*$ de norme 1 tel que $< x_k^*, j(k) - j(-k) >= 2k$.

b. Montrer que $< x_k^*, j(t) >= t$ pour tout $t \in [-k, k]$.

c. En déduire qu'il existe $x^* \in X^*$ de norme 1 tel que $< x^*, j(t) >= t$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

IV. DIFFÉRENTIABILITÉ DES FONCTIONS CONVEXES

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe.

a. Soient $a < b < c$ trois nombres réels. Montrer que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

b. Établir que pour tout $x \in \mathbf{R}$, la dérivée à gauche $f'_g(x)$ et la dérivée à droite $f'_d(x)$ de f en x existent, que $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$, et que si $x_1 < x_2$, on a

$$f'_g(x_1) \leqslant f'_d(x_1) \leqslant f'_g(x_2).$$

c. Montrer que f est continue, et que le sous-ensemble $\mathscr{S}$ de $\mathbf{R}$ constitué des points où f n'est pas dérivable est fini ou dénombrable (on vérifiera l'existence de $\psi : \mathscr{S} \to \mathbf{Q}$ tel que pour tout $x \in \mathscr{S}$, $\psi(x) \in]f'_g(x), f'_d(x)[$).

d. Soit $x \in \mathbf{R}$. On définit $\tau : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ par

$$\tau(t) = [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]/t.$$

Montrer que τ est impaire et croissante sur $\mathbf{R}^*$, puis que f est dérivable en x si et seulement si

$$\lim_{t \to 0^+} \tau(t) = 0.$$

2. Soit C un sous-ensemble convexe de $\mathbf{R}^n$ tel que $(-x) \in C$ pour tout $x \in C$, et $F : C \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. On suppose que $F(0) = 0$ et que F est majorée sur C. Montrer que

$$\sup_{x \in C} F(x) = \sup_{x \in C} |F(x)|.$$

3. Soit $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction convexe.

a. Soient $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbf{R}^n$ et $\alpha > 0$.

On note $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Montrer que

$$\sup_{\|h\|_1 \leqslant \alpha} g(x+h) - g(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n, |\varepsilon|=1} g(x + \varepsilon \alpha e_i) - g(x).$$

b. Montrer que g est continue en tout point x de $\mathbf{R}^n$.

4. Soient $k \in \mathbf{N}^*$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et $t > 0$. On pose

$$O_{k,i}(t) = \left\{x \in \mathbf{R}^n \; ; \; \frac{g(x+te_i) + g(x-te_i) - 2g(x)}{t} < \frac{1}{k}\right\}$$

et

$$V_{k,i} = \bigcup_{t>0} O_{k,i}(t).$$

a. Montrer que l'ensemble $V_{k,i}$ est ouvert.

b. Soit

$$\Delta_i = \bigcap_{k\geqslant 1} V_{k,i}.$$

Montrer que $\Delta_i = \{x \in \mathbf{R}^n \ ; \ \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \text{ existe}\}$.

c. Montrer que Δ_i est dense dans $\mathbf{R}^n$ (on pourra utiliser la Question IV.1.c).

5. Montrer que l'ensemble

$$\Omega_g = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta_i$$

est dense dans $\mathbf{R}^n$ (on remarquera que chaque ensemble Δ_i est une intersection dénombrable d'ouverts).

6. Soit $x \in \Omega_g$. On définit la fonction G par $G(y) = g(y) - g(x) - \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x)$.

a. Montrer que pour tout $h \in \mathbf{R}^n$,

$$|G(x+h)| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n, |\varepsilon|=1} G(x+\varepsilon\|h\|_1 e_i).$$

b. En déduire que Ω_g est l'ensemble des points de $\mathbf{R}^n$ en lesquels la fonction g est différentiable.

7. Soit $\| \, . \, \|$ une norme sur $\mathbf{R}^n$.

a. Justifier que $\| \, . \, \|$ est convexe, que $0 \notin \Omega_{\| \, . \, \|}$, que pour tout $x \in \Omega_{\| \, . \, \|}$ et tout $t > 0$, on a $tx \in \Omega_{\| \, . \, \|}$ et que $\{\nabla \| \, . \, \|\}(tx) = \{\nabla \| \, . \, \|\}(x)$.

b. Montrer que pour tout $x \in \Omega_{\| \, . \, \|}$, on a $\|\{\nabla \| \, . \, \|\}(x)\| = < \{\nabla \| \, . \, \|\}(x), \frac{x}{\|x\|} >= 1$.

c. Soit $z \in \mathbf{R}^n$. Soit $(x_p)_{p\geqslant 1}$ une suite de points de $\Omega_{\| \, . \, \|}$ qui converge vers z. Montrer que

$$\lim_{p\to\infty} < \{\nabla \| \, . \, \|\}(x_p), z >= \|z\|.$$

V. LE THÉORÈME DE FIGIEL

Dans cette partie, E désigne un espace normé de dimension finie N. Soit, dans les questions V.1 et V.2, un vecteur $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. On suppose de plus que x est un point de différentiabilité de la norme $\| \, . \, \|$ de E.

1. Soit $\varphi : E \to \mathbf{R}$ une application 1-Lipschitzienne telle que $\varphi(tx) = t$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Soit $y \in E$.

a. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}^*$, on a

$$1 = |t\varphi(y) - t\varphi\big((\varphi(y) + 1/t)x\big)| \leqslant \|x - t(y - \varphi(y)x)\|.$$

b. En déduire que $< \{\nabla \| \, . \, \|\}(x), y - \varphi(y)x >= 0$, puis que $\{\nabla \| \, . \, \|\}(x) = \varphi$.

2. Soit F un espace normé séparable et soit $\phi : E \to F$ une isométrie telle que $\phi(0) = 0$.

a. Montrer qu'il existe $f_x^* \in F^*$ de norme 1 tel que $< f_x^*, \phi(tx) >= t$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ (on utilisera la Question III.6.c)).

b. Montrer que $f_x^* \circ \phi = \{\nabla \| \, . \, \|\}(x)$.

Pour $x' \in \Omega_{\| \, . \, \|}$, on considère plus généralement $f_{x'}^* \in F^*$ de norme 1 telle que $f_{x'}^* \circ \phi = \{\nabla \| \, . \, \|\}(x')$.

3. a. Montrer que pour tout $z \in E\backslash\{0\}$, il existe un point $x' \in \Omega_{\|\ .\ \|}$ tel que $\{\nabla\|\ .\ \|\}(x')(z) \neq 0$ (on utilisera la Question IV.7.c)).

b. En déduire qu'il existe des points $x_1, x_2, ..., x_N$ de $\Omega_{\|\ .\ \|}$ tels que la famille des différentielles $\left(\{\nabla\|\ .\ \|\}(x_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant N}$ soit une base de E^*.

c. Montrer qu'il existe une base $(z_j)_{1\leqslant j\leqslant N}$ de E telle que

$$\{\nabla\|\ .\ \|\}(x_i)(z_j) = \delta_{i,j}.$$

D'après la Question V.2.b), pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$, il existe $f^*_{x_i} \in F^*$ tel que

$$\{\nabla\|\ .\ \|\}(x_i) = f^*_{x_i} \circ \phi.$$

On définit une application $T : F \to E$ par

$$T(y) = \sum_{i=1}^{N} f^*_{x_i}(y) z_i.$$

d. Montrer que T est linéaire continue et que $T \circ \phi = Id_E$.

4. On suppose dans cette question que $\overline{vect}[\phi(E)] = F$.

a. Montrer que pour tout $x' \in \Omega_{\|\ .\ \|}$, on a

$$f^*_{x'} = \{\nabla\|\ .\ \|\}(x') \circ T.$$

b. Montrer que $\|T\| = 1$ (pour $y \in F$, on pourra poser $z = T(y)$ et utiliser la Question IV.7 .c)).

5. On suppose à présent que X est un espace de Banach séparable de dimension infinie. D'après la Question III.3.a), on a

$$X = \overline{\bigcup_{k\geqslant 1} E_k}$$

où $(E_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. Soit Y un espace normé, et soit $\Phi : X \to Y$ une isométrie telle que $\Phi(0) = 0$ et $\overline{vect}[\Phi(X)] = Y$. On pose $F_k = vect[\Phi(E_k)]$.

a. Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue $T_k : F_k \to E_k$ telle que pour tout $x \in E_k$, $T_k(\Phi(x)) = x$, et que $\|T_k\| = 1$.

b. Montrer qu'il existe une application linéaire continue $T : Y \to X$ telle que $T \circ \Phi = Id_X$, et que $\|T\| = 1$.

6. **Applications :**

a. On munit $\mathbf{R}^2$ d'une norme arbitraire. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ une isométrie. Montrer qu'il existe une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $\mathbf{R}^2$ et une application Lipschitzienne φ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $f(t) = t\varepsilon_1 + \varphi(t)\varepsilon_2$.

b. Montrer le théorème de Mazur-Ulam : si X et Y sont des espaces de Banach séparables, toute surjection isométrique $\Phi : X \to Y$ telle que $\Phi(0) = 0$ est linéaire.

VI. LE RÉSULTAT PRINCIPAL

Soit X un espace normé séparable de dimension infinie. On désigne par $Lip_0(X)$ l'espace vectoriel des fonctions Lipschitziennes f de X dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in Lip_0(X)$, on pose

$$\|f\|_L = sup\{\frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|}\ ;\ (x,y)\in X^2,\ x\neq y\}.$$

On vérifie facilement que $\|\ .\ \|_L$ est une norme sur $Lip_0(X)$, que le dual X^* de X est un sous-espace de $Lip_0(X)$ et que $\|x^*\| = \|x^*\|_L$ pour tout $x^* \in X^*$.

1. Pour tout $\mu \in Lip_0(X)^*$, on note $\beta(\mu)$ la restriction de μ à X^*. Montrer que β est une application linéaire continue de $Lip_0(X)^*$ dans X^{**} et que $\|\beta\| = 1$.

2. Montrer qu'il existe une suite $(x_i)_{i\geqslant 1}$ de vecteurs de X linéairement indépendants tels que $\overline{vect}[(x_i)_{i\geqslant 1}] = X$ et $\|x_i\| = 2^{-i}$ pour tout i.

On pose $E_k = vect[\{x_i\ ;\ 1\leqslant i\leqslant k\}]$.

On considère l'unique application linéaire $R_k : E_k \to Lip_0(X)^*$ qui satisfait pour tout $1\leqslant n\leqslant k$ et toute $f\in Lip_0(X)$

$$R_k(x_n)(f) = \int_{[0,1]^{k-1}} \big[f(x_n + \sum_{j=1, j\neq n}^{k} t_j x_j) - f(\sum_{j=1, j\neq n}^{k} t_j x_j)\big] dt_1 dt_2 ... dt_{n-1} dt_{n+1} ... dt_k.$$

3. Soit $f\in Lip_0(X)$. On note f_k la restriction de f à E_k. Montrer que si f_k est continûment différentiable, on a pour tout $x\in E_k$

$$R_k(x)(f) = \int_{[0,1]^k} < \{\nabla f_k\}(\sum_{j=1}^{k} t_j x_j), x > dt_1 dt_2 ... dt_k.$$

4. Montrer que

$$\|R_k\| \leqslant 1$$

(On utilisera la Question I. 2. d).

5. a. Montrer que si $1\leqslant n\leqslant k$, on a

$$\|R_{k+1}(x_n) - R_k(x_n)\| \leqslant 2\|x_{k+1}\|.$$

b. Montrer que pour tout $x\in E_k$, la suite $(R_l(x))_{l\geqslant k}$ converge dans l'espace de Banach $Lip_0(X)^*$.

6. On pose $C = \bigcup_{k\geqslant 1} E_k$. La Question VI.5 permet de définir pour tout $x\in C$

$$R(x) = \lim_{l\to\infty} R_l(x).$$

a. Montrer que R est une application linéaire continue de C dans $Lip_0(X)^*$ telle que $\|R\| = 1$ et $\beta\circ R(x) = J_X(x)$ pour tout $x\in C$ (l'application β est définie à la Question VI.1).

b. En déduire qu'il existe une application linéaire continue $\overline{R} : X \to Lip_0(X)^*$ telle que $\|\overline{R}\| = 1$ et $\beta\circ\overline{R} = J_X$.

Soient Y un espace de Banach et $Q : Y\to X$ une application linéaire continue, telle qu'il existe une application M-Lipschitzienne $\mathscr{L} : X \to Y$ telle que $Q\circ\mathscr{L} = Id_X$ et $\mathscr{L}(0) = 0$. On admettra que l'équation

$$< S(x), y^* > = < \overline{R}(x), y^*\circ\mathscr{L} >$$

où $y^* \in Y^*$ et $\overline{R}$ est définie à la Question VI. 6. b) ci-dessus, définit une application linéaire continue $S : X \to Y$ telle que $Q \circ S = Id_X$ et telle que $\|S\| \leqslant M$.

7. Montrer que si X est un espace de Banach séparable, et s'il existe une isométrie Φ de X dans un espace de Banach Y, alors Y contient un sous-espace vectoriel fermé linéairement isométrique à X.