Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Propriété d'approximation métrique inconditionnelle et sous-espaces de L^1 dont la boule est compacte en mesure

Gilles Godefroy, Nigel J. Kalton et Daniel Li

Résumé – Un espace de Banach a la propriété d'approximation métrique inconditionnelle (PAMI) s'il existe une suite (R_n) d'opérateurs de rang fini convergeant ponctuellement vers l'identité et telle que $\lim \|I - 2R_n\| = 1$. On montre que s'il ne contient pas $c_0(\mathbb{N})$ il est inconditionnellement complémenté dans son bidual par une projection de noyau w^*-fermé, et que, pour un sous-espace de L^1 avec la propriété d'approximation, avoir une boule compacte et localement connexe en mesure équivaut à satisfaire (PAMI) et la Propriété de Schur 1-forte, ou encore à être arbitrairement proche des sous-espaces w^*-fermés de ℓ_1. On construit un sous-espace de L^1 dont la boule unité est compacte en mesure mais non localement convexe.

Unconditional metric approximation property and subspaces of L^1 whose unit ball is compact for the metric of convergence in measure

Abstract – *A Banach space X has the unconditional metric approximation property (UMAP) if there exists a sequence (R_n) of finite rank operators which converges pointwise to the identity and such that $\lim \|I - 2R_n\| = 1$. We show that if such a Banach space does not contain $c_0(\mathbb{N})$ it is complemented in its bidual with a projection P such that $\|I - 2P\| = 1$ and* Ker (P) *is w^*-closed. We show that a subspace X of L^1 with the approximation property has (UMAP) and the 1-strong Schur property if and only if its unit ball is compact and locally convex in the metric of convergence in measure. We provide an example of a subspace of L^1 whose ball is compact but not locally convex in that metric.*

Abridged English Version – Let X be a Banach space with (UMAP), and (R_n) be an approximating sequence of finite rank operators (that is, $\lim \|x - R_n x\| = 0$ for all $x \in X$) such that $\|I - 2R_n\| = 1 + \delta_n$ with $\lim(\delta_n) = 0$. By a simple perturbation argument, we may and do assume that $R_k R_n = R_n$ if $k > n$ and $\Pi(1 + \delta_n) < 1 + \varepsilon$. Then (by [5], th. 3.8) if $A_n = R_n - R_{n-1}$, we have

$$(1) \qquad \sup_{N \geqq 1} \sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i A_i \right\| \leqq 1 + \varepsilon.$$

When $X \not\supset c_0(\mathbb{N})$, it follows from (1) and [2] that $Px^{**} = \lim R_n^{**} x^{**}$ exists for all $x^{**} \in X^{**}$. This shows the first assertion of the following result

Theorem 1. – *If X has (UMAP) and does not contain $c_0(\mathbb{N})$, there exists a projection $P = X^{**} \to X$ such that $\|I - 2P\| = 1$. Moreover the associated space* Ker (P) *is w^*-closed.*

When applied to subspaces of L^1, theorem 1, together with specific L^1 techniques, provides the analogue for $p = 1$ of the recent characterization [11] of the subspaces of L^p which are nearly isometric to subspaces of ℓ_p $(1 < p < \infty,\ p \neq 2)$. Our main result is

Theorem 2. – *Let X be a subspace of L^1 with the approximation property. The following assertions are equivalent:*

1) *X has (UMAP) and the unit ball B_X of X is relatively compact in the topology τ_m of convergence in measure.*

Note présentée par Gustave Choquet.

0764-4442/95/03201069 $ 2.00

2) B_X *is* τ_m*-compact and* τ_m*-locally convex.*

3) *For any* $\varepsilon > 0$, *there exists a* w^**-closed subspace* X_ε *of* ℓ_1 *such that* $\operatorname{dist}(X, X_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$.

Let us recall that by an unpublished result of H. P. Rosenthal (*see* [13]), B_X is τ_m-relatively compact if and only if X has the 1-strong Schur property (*see* [3], p. 67 for the definition). The most difficult implication of theorem 2 is 2) $\Rightarrow$ 3). It uses in particular the following lemma of independent interest.

LEMMA 3. – *Let* Y *be a subspace of* $c_0(\mathbb{N})$ *such that* Y^* *has the approximation property. Then for any* $\varepsilon > 0$, *there exists a sequence* (X_n) *of finite-dimensional subspaces of* Y^* *and a* $(w^* - w^*)$*-continuous operator* $T : Y^* \to (\sum \oplus X_n)_{l_1}$ *such that for all* $x \in Y^*$

$$(1-\varepsilon)\|x\| \leqq \|Tx\| \leqq (1+\varepsilon)\|x\|.$$

It is an open problem to know whether Lemma 3 holds true for an arbitrary subspace of $c_0(\mathbb{N})$. The same problem occurs for our next result, which follows from the proof of lemma 3.

PROPOSITION 4. – *Let* X *be a subspace of* $c_0(\mathbb{N})$ *with the metric approximation property. Then* X *is isomorphic to a quotient of* $c_0(\mathbb{N})$ *if and only if* X^* *is isomorphic to a subspace of* L^1.

Our last statement provides the first example of a separable Banach space whose ball is compact but not locally convex for a vector space topology.

THEOREM 5. – *There exists a subspace* E *of* L^1 *with the approximation property, and whose unit ball is compact but not locally convex for the topology of convergence in measure. In particular, this space fails the (UMAP).*

Dans toute cette Note X *désignera un espace de Banach* **séparable**. Selon [5], on dit que X a la **Propriété d'Approximation Métrique Inconditionnelle** s'il existe une suite d'opérateurs de rang fini $S_n : X \to X$ tels que :

1) $(\forall x \in X)$, $x = \lim_{n\to\infty} S_n x$; 2) $\lim_{n\to\infty} \|I - 2S_n\| = 1$.

Un tel espace a en particulier la Propriété d'Approximation Métrique. Le terme **Inconditionnelle** vient de ce que X à la Propriété d'Approximation Métrique Inconditionnelle si et seulement si ([5], th. 3.8) : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite d'opérateurs de rang fini $R_n : X \to X$ tels que

(1′) $(\forall x \in X)$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} R_n x$;

(2′) $\sup_{N\geqq 1} \sup_{\varepsilon_n = \pm 1} \left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n R_n \right\| \leqq 1 + \varepsilon$.

Pelczynski et Wojtaszczyk [12] avaient donné en termes de plongements de X dans certains sur-espaces une caractérisation des espaces X pour lesquels (1′) et (2′) sont vérifiés. La définition de Casazza et Kalton ci-dessus à l'avantage d'être **intrinsèque** et de relier la Propriété d'Approximation Métrique Inconditionnelle à des propriétés **géométriques** de l'espace X. Cet aspect a été exploité extensivement dans [8]; il y est démontré en particulier ([8], th. 3.5 et prop. 9.1 (1)) :

PROPOSITION 1. – *Pour tout espace de Banach* X *avec la Propriété d'Approximation Métrique Inconditionnelle et ne contenant pas* c_0 , *il existe une projection* P *de* X^{**} *parallèlement à* X *telle que* $\|I - 2P\| = 1$.

De façon équivalente : il existe une **symétrie isométrique** de X^{**} parallèlement à X, de sorte que $X^{**} = X \oplus_i X_s$ et

$$\|x + \sigma\| = \|x - \sigma\|, \qquad \forall x \in X, \quad \forall \sigma \in X_s.$$

Notons que l'on peut obtenir P de la façon suivante : on peut réaliser (1) et (2) de sorte que l'on ait aussi $S_m S_n = S_n$ pour $m > n$ ([10], lemma 2.4) et que $R_n = S_n - S_{n-1}$ ($S_0 = 0$) vérifie (2'); on pose alors :

$$\forall x^{**} \in X^{**}, \quad P x^{**} = \sum_{n=1}^{\infty} R_n^{**} x^{**}$$

la série convergeant dans X par le théorème de Bessaga-Pelczynski [2].

Théorème 2. – *Sous les hypothèses de la proposition* 1, *le sous-espace* X_s *de la décomposition* $X^{**} = X \otimes_i X_s$ *est toujours* w^**-fermé.*

Remarque. – Par [8], corollaire 9.3, cela signifie que l'on peut réaliser (1) et (2) avec des opérateurs S_n **qui commutent**. Le théorème 2 signifie que X est isométrique au dual d'un u-idéal strict (au sens de [8]).

Esquisse de démonstration. – Par le théorème de Banach-Dieudonné, X_s est w^*-fermé si et seulement si sa boule unité B_{X_s} l'est; la projection P étant bicontractante, c'est le cas si et seulement si $X \cap \bar{B}_{X_s}^{w^*} = \{0\}$. Soit donc $x_0 \in X \cap \bar{B}_{X_s}^{w^*}$. Il existe par réflexivité locale un filtre $(x_\alpha)_\alpha$ d'éléments de B_X convergeant faiblement vers x_0 tel que :

$$(\star) \qquad (\forall x \in X) \quad \lim \left(\|x + x_\alpha\| - \|x - x_\alpha\|\right) = 0.$$

Lemme 3. – *Si* X *a la propriété d'approximation métrique inconditionnelle, tout filtre borné* $(y_\alpha)_\alpha$ *d'éléments de* X *convergeant faiblement vers* 0 *vérifie*

$$(\star\star) \qquad (\forall x \in X) \quad \lim \left(\|y + y_\alpha\| - \|y - y_\alpha\|\right) = 0.$$

En appliquant ce lemme à $y = (2n - 1) x_0$ et $y_\alpha = x_0 - x_\alpha$, on a donc :

$$\begin{aligned}\overline{\lim}\, \|2nx_0 - x_\alpha\| &= \overline{\lim}\, \|(2n-1)x_0 + (x_0 - x_\alpha)\| \\ &\overset{(\star\star)}{=} \overline{\lim}\|(2n-1)x_0 - (x_0 - x_\alpha)\| \\ &= \overline{\lim}\, \|2(n-1)x_0 + x_\alpha\| \overset{(\star)}{=} \overline{\lim}\, \|2(n-1)x_0 - x_\alpha\|,\end{aligned}$$

de sorte que $\overline{\lim}\, \|2nx_0 - x_\alpha\| = \overline{\lim}\, \|x_\alpha\|$ pour tout $n \geq 1$, ce qui n'est possible que si $x_0 = 0$. □

Lorsque X est un sous-espace de ℓ_1 avec la propriété d'approximation métrique inconditionnelle, on a par ([8], th. 6.9) que $X_s = (X^{\perp\perp} \cap c_0^{\perp})$, donc X est w^*-fermé. Inversement si X est w^*-fermé et a la propriété d'approximation, on a par un résultat d'Alspach [1] que $X = X_0^*$ où X_0 est $(1+\varepsilon)$-isomorphe à un sous-espace de c_0 pour tout $\varepsilon > 0$, et donc X a la propriété d'approximation métrique inconditionnelle. On a donc

Proposition 4. – *Soit* X *un sous-espace de* ℓ_1 *avec la Propriété d'Approximation. Alors* X *a la Propriété d'Approximation Métrique Inconditionnelle si et seulement si* X *est* w^**-fermé.*

Plaçons-nous maintenant dans le cas où X est un sous-espace de $L^1 = L^1(0, 1)$ avec la Propriété d'Approximation Métrique Inconditionnelle. Il résulte de [8], th. 6.9 que $X^{\perp\perp} = X \oplus_1 (X^{\perp\perp} \cap L_s^1)$, c'est-à-dire (*voir* [7], déf. 2) que la boule unité B_X est fermée en mesure, par le théorème de Bukhvalov-Lozanovski ([4], th. 1.1). Soit alors $X^\sharp = \{\varphi \in X^*;\ \varphi_{|B_X} \text{ continue en mesure}\}$.

Par [9], lemma 1.2, et le théorème 2, on a $(X^\sharp)^\perp = X_s$ de sorte que $X \cong (X^\sharp)^*$ et que la topologie préfaible $\sigma(X, X^\sharp)$ est moins fine que celle de la convergence en mesure sur B_X. Cela nous conduit au :

THÉORÈME 5. – *Soit X un sous-espace de L^1 avec la Propriété d'Approximation. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *X a la Propriété d'Approximation Métrique Inconditionnelle et B_X est relativement compacte en mesure;*

2) *B_X est compacte en mesure et $X^\sharp$ sépare les points de X ;*

2′) *B_X est compacte en mesure et la topologie τ_m de la convergence en mesure est localement convexe sur B_X;*

3) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace w^*-fermé X_ε de ℓ_1 tel que* dist $(X, X_\varepsilon) \leqq 1 + \varepsilon$.

Remarque. – Kalton et Werner ([1], th. 5.4) ont montré que pour $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ et X un sous-espace de L^p on a B_X compacte en mesure si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $X_\varepsilon \subset \ell_p$ tel que dist $(X, X_\varepsilon) \leqq 1 + \varepsilon$. La preuve de ce résultat utilise d'une part l'inconditionnalité de la base de Haar dans L^p et d'autre part la coïncidence, sur la boule de tout sous-espace de L^p, des topologies de la convergence en mesure et de la convergence en $\|\cdot\|_1$, qui rend automatique la convexité locale sur la boule de la topologie de la convergence en mesure. Dans le cas de L^1, ces deux points ne peuvent être éludés et doivent faire partie des hypothèses (*voir* théorème 7 ci-dessous).

Démonstration. – L'équivalence 2) $\Leftrightarrow$ 2′) est classique; 1) $\Rightarrow$ 2) provient de ce qui précède et 3) $\Rightarrow$ 1) de la proposition 4 et d'un résultat non publié de Rosenthal ([13], th. 1.7) d'après lequel B_X est relativement compacte en mesure si et seulement si X a la propriété de Schur 1-forte (*voir* la définition dans [3], p. 67). Il reste à prouver que 2) $\Rightarrow$ 3). Or τ_m coïncide avec $\sigma(X, X^\sharp)$ sur B_X de sorte que $X^\sharp$ a la propriété (m_1^*) donc (m_∞) ([11], déf. 3.1), et que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace Y_ε de c_0 tel que dist $(X^\sharp, Y_\varepsilon) \leqq 1 + \varepsilon$ ([11], th. 4.5). Le résultat suivant, qui a son intérêt propre, permettra de conclure, puisque comme $Y^* \subset L^1$, les X_n sont $(1+\varepsilon)$-isomorphes à des sous-espaces de $\ell_1^{k(n)}$.

LEMMA 6. – *Soit Y un sous-espace de c_0 dont le dual Y^* a la Propriété d'Approximation. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite de sous-espaces de dimension finie X_n de Y^* et un opérateur $(w^* - w^*)$ $T : Y^* \to (\sum \oplus_{n \geq 1} X_n)_{\ell_1}$ tel que pour tout $x \in Y^*$ on ait :*

$$(1-\varepsilon)\|x\| \leqq \|Tx\| \leqq (1+\varepsilon)\|x\|.$$

Remarque. – Le lemme 6 est en fait un résultat isomorphique :

COROLLAIRE DU LEMME 6. – *Soit X un sous-espace de c_0 avec la Propriété d'Approximation Métrique. Alors X est isomorphe à un quotient de c_0 si et seulement si X^* est isomorphe à un sous-espace de L^1.*

On ne sait pas si l'hypothèse d'Approximation Métrique est nécessaire.

Voyons maintenant pourquoi il est indispensable d'ajouter des hypothèses à celles du cas $p > 1$.

THÉORÈME 7. – *Il existe un sous-espace E de L^1 avec la Propriété d'Approximation et dont la boule unité est compacte en mesure, mais sur la boule duquel la topologie de la convergence en mesure n'est pas localement convexe; en particulier il n'a pas la Propriété d'Approximation Inconditionnelle.*

Démonstration. – Il résulte de [3], th. 1.2, qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers a_k, avec $a_1 = 1$, une suite de réels $p_k > 1$ telle que $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = 1$ et de variables aléatoires indépendantes Z_k telles que si $I_k = [a_k,\ a_{k+1}[$, alors :

(i) Z_i a la même loi que $|Y^{(k)}|$, où $Y^{(k)}$ est p_k-stable et normalisée ($\|Y^{(k)}\|_1 = 1$), pour $i \in I_k$;

(ii) $\tau_m - \operatorname{dist}(V,\ \mathbb{R}\cdot \mathbf{1}) \leqq 1/2^k$ pour tout $V = \sum\limits_{i\in I_k} \alpha_i\,(Z_i - \mathbf{1})$ tel que $\|V\|_1 \leqq 1$;

(iii) $\|(1/|I_k|)\sum\limits_{i\in I_k} Z_i - \mathbf{1}\| \leqq 1/k$.

La propriété cruciale est (ii).

On définit E comme le sous-espace de L^1 engendré par $\mathbf{1}$ et les $U_i = Z_i - \mathbf{1}$, $i \geqq 1$. Les U_i étant indépendantes et d'espérance nulle, $\mathcal{B} = \{\,\mathbf{1}\,\} \cup \{\,U_i,\ i \geqq 1\,\}$ est une base inconditionnelle de E, de sorte que E a la Propriété d'Approximation. D'autre part, la propriété (ii) permet de montrer que B_E est compacte en mesure.

Par contre E n'a pas la Propriété d'Approximation Métrique Inconditionnelle et τ_m n'est pas localement convexe sur B_E car $(Z_i)_{i\geqq 1}$ tend en mesure vers 0, de sorte que (iii) entraîne que $\mathbf{1} \in (E^\sharp)^\perp$ et le théorème 5 permet de conclure. □

Notons que le théorème 7 fournit le premier exemple d'espace de Banach **séparable** dont la boule unité est compacte mais non localement convexe pour une topologie d'e.v.t. séparé.

Note remise le 13 février 1995, acceptée le 20 février 1995.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] D. E. ALPACH, Quotients of c_0 are almost isometric to subspaces of c_0, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 76, 1979, p. 285-288.
[2] C. BESSAGA et A. PELCZYNSKI, On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, *Studia Math.*, 17, 1958, p. 151-164.
[3] J. BOURGAIN et H. P. ROSENTHAL, Martingales valued in certain subspaces of L^1, *Israel J. Math.*, 37, 1982, p. 54-75.
[4] A. V. BUKHVALOV et G. LOZANOVSKI, On sets closed in measure, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2, 1978, p. 127-148.
[5] P. CASAZZA et N. J. KALTON, Notes on approximation properties in separable Banach spaces, in *Geometry of Banach Spaces*, P. F. X. MÜLLER et W. SCHACHERMAYER éds., *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 158, Cambridge Univ. Press, 1990, p. 49-63.
[6] M. FEDER, On subspaces of spaces with an unconditional basis and spaces of operators, *Illinois J. Math.*, 24, 1980, p. 196-205.
[7] G. GODEFROY, Sous-espaces bien disposés de L^1. Applications, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 286, 1984, p. 227-249.
[8] G. GODEFROY, N. J. KALTON et P. D. SAPHAR, Unconditional ideals in Banach spaces, *Studia Math.*, 104, 1993, p. 13-59.
[9] G. GODEFROY et D. LI, Some natural families of M-ideals, *Math. Scand.*, 66, 1990, p. 249-263.
[10] W. B. JOHNSON, On the existence of strongly series summable Markuschevich bases in Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 157, 1971, p. 482-486.
[11] N. J. KALTON et D. WERNER, Property (M), M-ideals and almost isometric structure of Banach spaces, *J. Reine Angew. Math.* (à paraître).
[12] A. PELCZYNSKI et P. WOJTASZCZYK, Banach spaces with finite dimensional expansions of the identity and universal bases of finite-dimensional subspaces, *Studia Math.*, 40, 1971, p. 91-108.
[13] H. P. ROSENTHAL, Sous-espaces de L^1, *Cours de 3^e cycle*, Université Paris-VI, 1979, non publié.

G. G. : Équipe d'Analyse, Université Paris-VI, Boîte 186, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France et Department of Mathematics, University of Missouri, Columbia, USA; e-mail :gig@ccr.jussieu.fr

N. J. K. : Department of Mathematics, University of Missouri, Columbia, USA; e-mail : mathnjk @mizzou1.missouri.edu

D. L. : Université Paris-Sud, Mathématique, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France et Équipe d'Analyse, Université Paris-VI, Boîte 186, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France. e-mail : li@anh.matups.fr