C. R. Acad. Sci. Paris, t. 313, Série I, p. 845-849, 1991

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Idéaux inconditionnels dans les espaces de Banach

Gilles Godefroy, Nigel J. Kalton et David Saphar

Résumé – On étudie dans cette Note les sous-espaces fermés d'un Banach dont l'orthogonal est le noyau d'une projection P satisfaisant $\|I-2P\|=1$. On montre que P est w^*-continue dès que ce sous-espace ne contient pas $c_0(\mathbb{N})$. Si X est complexe, séparable, et qu'il existe une projection hermitienne de noyau $X^\perp$ sur X^{***}, on montre un théorème de structure qui généralise des résultats connus dans le cadre des espaces réticulés continus en ordre. Les résultats présentés dans cette Note sont développés dans l'article [8].

Unconditional ideals in Banach spaces

Abstract – *We study in this Note closed subspaces of Banach spaces whose annihilator is the kernel of a projection* P *satisfying* $\|I-2P\|=1$. *Among other things we show that if such a subspace is not complemented, it contains* $c_0(\mathbb{N})$. *In the special case of spaces embedded in their bidual, we show structural theorems which are extending classical properties of order-continuous Banach lattices. The results of this Note are developed in* [8].

Abridged English Version – Let Y be a Banach space, and X a closed subspace of Y. We denote $R_X = Y^* \to X^*$ the canonical restriction map. When there exists a continuous projection P on Y^* such that $\ker(P) = X^\perp$, we define an operator $T: Y^{**} \to X$ by the equation

$$\langle T(y), R_X(y^*)\rangle = \langle y, P(y^*)\rangle$$

An important special case is when $Y = X^{**}$ and $P = \pi_X$ is the canonical projection from X^{***} onto X^*. In this case $T = \mathrm{Id}_{X^{**}}$.

We first study this special case, and show.

Theorem 1. – *Let* X *be a separable Banach space. If there is* $\lambda \in (1, 2]$ *such that* $\|I-\lambda\pi_X\|=1$ *then* X^* *is separable. Conversely if* X^* *is separable then for every* $\lambda \in (1, 2)$ *there is an equivalent norm on* X *such that* $\|I-\lambda\pi_X\|=1$.

We will see below that the case $\lambda = 2$ is quite different. The proof of theorem 1 relies on Zippin's theorem [12] and a renorming argument from [5]. It follows from theorem 1 that the "almost uniformly smooth" renorming of [7] can be obtained hereditarily.

We investigate the case $\lambda = 2$, and recall a definition given in [5] for real Banach spaces.

Définition 2. – Let X be a closed subspace of a Banach space Y. If there is a projection P on Y^* with $\ker(P) = X^\perp$ and $\|I-2P\|=1$ [resp. $\|I-(1+\lambda)P\|=1$ for any $|\lambda|=1$ in the complex case] then X is called a *u*-ideal in Y (resp. an *h*-ideal in the complex case).

For any $x^{**} \in X^{**}$, call $K_u(x^{**})$ the infimum of all $a \in \mathbb{R}^+$ such that $x^{**} = w^*-\sum_{i=1}^{\infty} x_i$,

with $\sup\left\{\left\|\sum_{k=1}^{n} \theta_k x_k\right\|; n \geqq 1, |\theta_k| = 1\right\} \leqq a$.

In the complex case, $K_h(x^{**})$ is defined by the same formula. We now have the following crucial.

Lemma 3. – *Let* X *be a u-ideal (resp. h-ideal) of* Y. *Pick* $y \in Y$, *and* (A_n) *a sequence of convex subsets of* X *such that* $T(y) \in \bigcap\{\bar{A}_n^{\omega^*}; n \geqq 1\} = H$. *Then for every* $\varepsilon > 0$ *there exists* $x^{**} \in H$ *such that* $K_u(x^{**}) < \|y\| + \varepsilon$ [*resp.* $K_h(x^{**}) < \|y\| + \varepsilon$] *and* $d(x^{**}, X) \geqq 1/2\, d(T(y), X)$.

Note présentée par Gustave Choquet.

0764-4442/91/03130845 $ 2.00 © Académie des Sciences

By lemma 3 and [3] we have the following improvement of [2].

THEOREM 4. — *If a u-ideal* X *of a Banach space* Y *does not contain an isomorphic copy of* $c_0(\mathbb{N})$ *then* X *is u-summand in* Y.

We can also extend [9] and provide a converse statement.

THEOREM 5. — *Let* X *be a Banach space containing no isomorphic copy of* $l_1(\mathbb{N})$. *Then* $\|I-2\pi_X\|=1$ *if and only if* X *has Pelczynski's property* (u) *with constant one.*

The complex analogue of theorem 5 also holds.

The class of spaces which are *h*-ideals in their biduals extends the class of order-continuous Banach lattices, and shares many of its properties, as shown by

THEOREM 6. — *Let* X *be a separable complex Banach space which is an h-ideal in its bidual. Then there exists a hermitian projection* T *from* X^{**} *onto the space* Ba(X) *of first Baire class elements of* X^{**}, *and* X *has the complex version of Pelczynski's property* (u) *with constant one.*

The following result, whose proof uses a lifting lemma from ([1], [6]), shows that many M-ideals are the "smoothest" isomorphic preduals of their duals—at least under a proximity assumption.

THEOREM 7. — *Let* X *be a separable space which is* M-*ideal in its bidual, with the metric approximation property. If an isomorphic predual* Y *of* X^* *is such that*

$$\sup\{K_u(y^{**}); y^{**}\in Y^{**}\}<d(X^*, Y^*)^{-1}+2d(X^*, Y^*)^{-2}$$

then Y *is isomorphic to* X.

Hence for instance any isometric predual of X^* which has Pelczynski's property (u) with a constant $\lambda<3$ is isomorphic to X.

Soient Y un espace de Banach réel ou complexe, et X un sous-espace fermé de Y. Nous notons $R_X=Y^*\to X^*$ la surjection canonique de restriction à X. Lorsqu'il existe $\sigma: X^*\to Y^*$ linéaire continue telle que $R_X\sigma=\mathrm{Id}_{X^*}$ nous disons que X est un idéal de Y. Dans ce cas, on note $P=\sigma R_X$ la projection associée sur Y^* telle que $\ker(P)=X^\perp$, et on définit $T=Y\to X^{**}$ par la formule

$$\langle T(y), R_X(y^*)\rangle=\langle y, P(y^*)\rangle \tag{1}$$

pour tous $y\in Y$ et $y^*\in Y^*$. Notons que $T(y)=y$ si $y\in X$. Un cas particulier important est $Y=X^{**}$, avec σ l'injection naturelle i_1 de X^* dans X^{***}. Dans ce cas, $P=\pi_X$ est la projection canonique de X^{***} sur $i_1(X^*)$, et $T=\mathrm{Id}_{X^{**}}$.

Nous étudions d'abord ce cas particulier. On définit l'ensemble de Godun G(X) d'un espace X par

$$G(X)=\{\lambda\in\mathbb{C}; \|I-\lambda\pi_X\|\leqq 1\}.$$

On montre que $G(X)\subset D=\{\lambda; |\lambda-1|\leqq 1\}$ et que $G(X)\cap(1,2]\neq 0$ dès que $G(X)\not\subset[0,1]$. On établit alors :

THÉORÈME 1. — *Soit* X *un espace de Banach séparable. Si* $G(X)\cap(1,2]\neq 0$, *alors* X^* *est séparable. Inversement si* X^* *est séparable, pour tout* $1<\lambda<2$ *il existe une norme telle que* $\lambda\in G(X)$ *pour cette norme.*

La preuve du théorème 1 repose sur un théorème de Zippin [12] et un résultat de [5]. A l'aide d'arguments de séparation, on en déduit une extension de [7].

COROLLAIRE 2. — *Si* X^* *est séparable, il existe pour tout* $\alpha > 1/2$ *une norme équivalente sur* X *telle que tout sous-espace* Y *de quotient de* X *vérifie : tout sous-espace propre* M *de* Y^* *a une caractéristique au plus égale à* α.

Rappelons à présent une définition donnée dans [5] dans le cas réel.

DÉFINITION 3. — Un idéal fermé X d'un espace de Banach Y est un *u*-idéal si $\|I-2P\|=1$. Dans le cas complexe, X est un *h*-idéal de Y si $\|I-(1+\lambda)P\|=1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda|=1$.

Notons que cette dernière condition signifie exactement que P est une projection hermitienne (*voir* [4]). Le lemme suivant joue un rôle crucial dans ce travail.

LEMME 4. — *Soit* X *un u-idéal* (*resp. h-idéal*) *de* Y. *Soient* $y \in Y$, $\varepsilon > 0$, *et* (A_n) *une suite de convexes de* X *telle que* $T(y) \in \bigcap \{\bar{A}_n^*;\, n \geqq 1\} = H$. *Alors il existe* $x^{**} \in H$ *tel que* $K_u(x^{**}) < \|y\| + \varepsilon$ [*resp.* $K_h(x^{**}) < \|y\| + \varepsilon$] *et* $d(x^{**}, X) \geqq 1/2\, d(T(y), X)$.

On a noté $K_u(x^{**})$ l'inf. des $a \in \mathbb{R}^+$ tels qu'on puisse écrire $x^{**} = w^* - \sum_{i=1}^{\infty} x_i$, avec

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{n} \theta_k x_k \right\| ;\, n \geqq 1, |\theta_k| = 1 \right\} \leqq a.$$

On définit de même $K_h(x^{**})$ sur $\mathbb{C}$.

On déduit de ce lemme et d'un résultat de [3] :

THÉORÈME 5. — *Si* X *est u-idéal d'un espace de Banach* Y *et si* X *ne contient pas de sous-espace isomorphe à* $c_0(\mathbb{N})$, *alors* X *est u-complémenté dans* Y.

Ce résultat est montré dans [2] dans le cas des M-idéaux. Le lemme 4 est également l'outil central de la démonstration du

THÉORÈME 6. — *Soit* X *un espace de Banach ne contenant pas de sous-espace isomorphe à* $l_1(\mathbb{N})$. *Alors* $G(X) = [0, 2]$ [*resp.* $G(X) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| = 1\}$] *si et seulement si* $K_u(X) = 1$ [*resp.* $K_h(X) = 1$].

On note ici $K_u(X) = \sup\{K_u(x^{**});\, x^{**} \in \mathrm{Ba}(X),\, \|x^{**}\| = 1\}$ où $\mathrm{Ba}(X) = \{x^{**} \in X^{**};\, x^{**} = w^*\text{-}\lim_{n \to \infty} x_n \text{ avec } (x_n) \subseteqq X\}$; de même pour $K_h(X)$.

Le théorème 6 étend le résultat de [9]. On montre également qu'il existe des espaces à dual séparable et tels que $K_u(X) = 1$, qui ne sont pas isomorphes à un espace M-idéal de son bidual; $E = (\Sigma \oplus c_0(\mathbb{N}))_2$ fournit un exemple.

Tout espace de Banach complexe réticulé X à norme continue en ordre est *h*-idéal de X^{**} (puisque $X^\perp$ est une bande de X^{***}). Certaines propriétés des *h*-idéaux sont similaires aux propriétés des espaces réticulés, comme le montre le

THÉORÈME 7. — *Soit* X *un espace complexe séparable. Si* X *est h-idéal de* X^{**}, *alors* $K_h(X) = 1$ *et il existe une projection hermitienne* T *de* X^{**} *sur* Ba(X).

Esquisse de démonstration. — L'opérateur $T = X^{**} \to X^{**}$ défini par (1) vérifie en particulier $\langle T(x^{**}), x^* \rangle = \langle x^{**}, P(x^*) \rangle$ pour tout $x^* \in X^*$; il est donc hermitien si T l'est. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U = \exp(itT)$ est une bijection isométrique de X^{**}, donc par [10] (où [11]) U est w^*-continue sur les suites de Cauchy faibles. Il en est de même pour T par différentiation. Comme $T_{|X} = \mathrm{Id}_X$, il s'ensuit que $T(x^{**}) = x^{**}$ pour tout $x^{**} \in \mathrm{Ba}(X)$. Le lemme 4 montre alors que $K_h(X) = 1$.

Il suffit maintenant de montrer que $T(x^{**}) \in \mathrm{Ba}(X)$ pour tout $x^{**} \in X^{**}$. Soit M un sous-espace séparable normant de X^*. Le lemme 4 montre qu'il existe $x_0^{**} \in \mathrm{Ba}(X)$ tel que $\langle T(x^{**}), x^* \rangle = \langle x_0^{**}, x^* \rangle$ pour tout $x^* \in M$. Soit $x_1^* \in X^*$; en appliquant le même raisonnement à $M_1 = \operatorname{span}\{M, x_1^*\}$ on trouve $x_1^{**} \in Ba(X)$ tel que $\langle T(x^{**}), x^* \rangle = \langle x_1^{**}, x^* \rangle$ pour tout $x^* \in M_1$. On a $M \subset \ker(x_0^{**} - x_1^{**}) = N$ donc N est normant. Si $x_0^{**} \neq x_1^{**}$, soit $x_2^{**} = \| x_0^{**} - x_1^{**} \|^{-1} (x_0^{**} - x_1^{**})$. Comme $K_u(x_2^{**}) = 1$, il existe (x_n) dans X telle que $w^*\text{-}\lim(x_n) = x_2^{**}$ et $\lim \| x_2^{**} - 2x_n \| = 1$.

On a alors $\overline{\lim}\,[\operatorname{dist}(x_n, \mathbb{C}\,x_2^{**})] \leq 1/2$, alors que $\underline{\lim}\, \| x_n \| \geq 1$. Donc $\ker(x_2^{**})$ ne peut être normant. Ceci montre que $x_1^{**} = x_0^{**}$. Comme x_1^* était arbitraire, on a bien $T(x^{**}) = x_0^{**} \in Ba(X)$. □

La réciproque du théorème 7 est vraie sous une condition de compatibilité entre T et l'approximation de $T(x^{**})$, à savoir : pour tout $x^{**} \in X^{**}$, il existe (x_n) dans X tels que

(i) $T(x^{**}) = w^*\text{-}\lim(x_n)$.

(ii) $\overline{\lim}\, \| x^{**} - (1+\lambda) x_n \| \leq \| x^{**} \|$

pour tout λ de module 1. Cette condition est nécessaire; en effet on a :

THÉORÈME 8. — *Soit* X *un espace séparable complexe avec la propriété d'approximation compacte métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) K(X) *est un h-idéal de* $K(X)^{**}$.

(ii) X *est un* M-*idéal et a* (UKAP).

La propriété (UKAP), essentiellement définie dans [5], est l'existence d'une suite (K_n) d'opérateurs compacts telle que $\lim K_n = \mathrm{Id}_X$ pour la topologie forte des opérateurs, et

$$\lim_{n \to \infty} \| I - (1+\lambda) K_n \| = 1$$

pour tout λ de module 1.

On montre que si X à dual séparable a (UKAP), alors $K_h(K(X)) = 1$ et il existe une projection hermitienne de $K(X)^{**}$ sur $Ba(K(X))$. Si on prend par exemple $X = \mathbb{C} \oplus_1 c_0$, ces deux conditions seront donc réunies; cependant, par le théorème 8, K(X) ne sera pas h-idéal de son bidual.

Il suit du théorème 6 que si X ne contient pas $l_1(\mathbb{N})$, X^* a au plus un prédual isométrique tel que $K_u(X) = 1$. En effet, si $K_u(X) = K_u(Y) = 1$ et X^* est isométrique à Y^*, on a $\| I - 2\pi_X \| = \| I - 2\pi_Y \| = 1$ et comme $\pi_X \pi_Y = \pi_Y$ et $\pi_Y \pi_X = \pi_X$, on a pour $n \geq 1$

$$[(I - 2\pi_X)(I - 2\pi_Y)]^n = I - 2n(\pi_X - \pi_Y)$$

d'où $\pi_X = \pi_Y$. Le résultat suivant est une version isomorphique partielle de ce résultat dans le cas des M-idéaux. Il utilise un lemme de relèvement de [1] et [6].

THÉORÈME 9. — *Soit* X *un espace séparable* M-*idéal de son bidual, avec la propriété d'approximation métrique. Soit* Y *un espace de Banach tel que* Y^* *soit isomorphe à* X^*. *Si on a*

$$K_u(Y) < d(X^*, Y^*)^{-1} + 2d(X^*, Y^*)^{-2},$$

alors Y *est isomorphe à* X.

En particulier, Y est isomorphe à X si X^* est isométrique à Y^* et $K_u(Y) < 3$, ou si $K_u(Y) = 1$ et $d(X^*, Y^*) < 2$.

Rappelons qu'on ne sait pas si tout prédual isomorphique de $l_1(\mathbb{N})$, qui a la propriété (u), est isomorphe à $c_0(\mathbb{N})$.

Note remise le 7 octobre 1991, acceptée le 18 octobre 1991.

Références bibliographiques

[1] T. Ando, *J. Approx. Theory*, 13, 1975, p. 158-166.
[2] E. Behrends et P. Harmand, *Studia Math.*, 81, 1985, p. 159-169.
[3] C. Bessaga et A. Pelczynski, *Studia Math.*, 17, 1958, p. 151-164.
[4] F. F. Bonsall et J. Duncan, *London Math. Soc. Lecture Notes*, 10, Cambridge Univ. Press, 1973.
[5] P. G. Casazza et N. J. Kalton, *London Math. Soc. Lecture Notes*, 158, Cambridge Univ. Press, 1991, p. 49-64.
[6] M. D. Choi et E. G. Effros, *Canad. J. Math.*, 29, 1977, p. 1092-1101.
[7] C. Finet et W. Schachermayer, *Studia Math.*, 92, 1989, p. 275-283.
[8] G. Godefroy, N. J. Kalton et D. Saphar, *Unconditional ideals in Banach spaces* (à paraître).
[9] G. Godefroy et D. Li, *Ann. Inst. Fourier*, 39, 1989, p. 361-371.
[10] G. Godefroy, *Ann. Sci. Éc. Norm. sup.*, 16, 1983, p. 109-122.
[11] G. Godefroy et N. Kalton, *Contemp. Math.*, 85, 1989, p. 195-238.
[12] M. Zippin, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 310, 1988, p. 371-379.

G. G. : *Équipe d'Analyse*, *Université Paris-VI*, Boîte n° 186, 4, *place Jussieu*, 75252 *Paris Cedex* 05;
N. J. K. : *University of Missouri, Columbia*, *Department of Mathematics*, *Columbia*, *MO* 65211, *U.S.A.*;
D. S. : *Technion*, *Department of Mathematics*, 32000 *Haïfa*, *Israel*.