ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Propriétés d'idéaux d'opérateurs entre espaces de Banach réticulés solides.* Note (*) de **Nigel J. Kalton** et **Paulette Saab,** présentée par Gustave Choquet.

Soient E et F deux espaces de Banach réticulés solides tels que les intervalles d'ordre de F soient faiblement compacts, et soient S, T : $E \to F$ deux opérateurs linéaires continus tel que $0 \leqq S \leqq T$. Alors si T est Dunford-Pettis, l'opérateur S est Dunford-Pettis aussi. Pour cela, nous démontrons d'abord un théorème d'approximation général qui s'avère être très utile pour prouver des résultats concernant d'autres classes d'opérateurs (par ex. les opérateurs dits Dunford-Pettis faibles, l_p-singuliers et complémentablement l-$_p$-singuliers).

FUNCTIONAL ANALYSIS. — Ideal Properties of Regular Operators between Banach Lattices.

In this paper we show that if E *and* F *are Banach lattices such that* F *has order-continuous norm, if* $T : E \to F$ *is a positive Dunford-Pettis operator and if* $0 \leqq S \leqq T$, *then* S *is a Dunford-Pettis operator. The proof of the above mentioned result hinges on a technical approximation theorem that has many other applications to similar problems concerning other classes of operators* (e. g. *weak Dunford-Pettis,* l_p*-singular and complementably* l_p*-singular operators).*

Dans [3] Dodds et Fremlin démontrent le résultat suivant : soient E et F deux espaces de Banach réticulés solides tels que les intervalles d'ordre de E' et F soient faiblement compacts, et soient T, S : $E \to F$ deux opérateurs linéaires continus tels que $0 \leqq S \leqq T$, alors si T est compact, l'opérateur S est compact aussi. Les conditions sur E et F' sont nécessaires, *voir* [1]. Dans leur article [2], Aliprantis et Burkinshaw posent la question de savoir si, sous les mêmes hypothèses sur E et F, un résultat analogue pour les opérateurs dits de Dunford-Pettis reste vrai. Cette question a été résolue affirmativement par W. Haid [4] (*voir* aussi de Pagter [5]). Le but de cette Note est de prouver un résultat d'approximation général qui a de nombreuses applications; en effet le théorème 1 ci-dessous nous permettra de prouver le théorème de Haid sans aucune hypothèse supplémentaire sur l'espace E. Les techniques utilisées nous permettent d'étendre et raffiner un autre résultat de [2] et de prouver des théorèmes concernant d'autres larges classes d'opérateurs.

1. Notations et préliminaires. — Si X et Y sont deux espaces de Banach, l'espace des opérateurs linéaires de X dans Y sera noté par $\mathscr{L}(X, Y)$. Rappelons que $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ est dit de *Dunford-Pettis* si $\|T x_n\|$ converge vers 0 pour toute suite $\{x_n\}$ de E qui converge faiblement vers 0. Dans [2], $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ est dit de *Dunford-Pettis faible* si pour toute suite $\{x_n\}$ de E convergente faiblement vers 0 et pour toute suite $\{y'_n\}$ de F' convergente faiblement vers 0, $\lim_{n \to \infty} y'_n(T x_n) = 0$. Si E et F sont deux espaces de Banach réticulés solides nous noterons par $\mathscr{L}_r(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires qui sont différence de deux opérateurs positifs. Si E est un espace de Banach réticulé solide, un opérateur $M \in \mathscr{L}_r(E, E)$ est dit *un multiplicateur* de E s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|M e| \leqq m |e| \quad \text{pour tout } e \in E.$$

Enfin si A est un sous-ensemble de E, nous poserons $A^+ = A \cap E_+$, où E^+ désigne le cône positif de E.

2. Le théorème d'approximation principal. — Le théorème suivant constitue le résultat principal de cette Note.

Théorème 1. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach réticulés solides dont chacun possède un point quasi intérieur. Soit* $T \in \mathscr{L}(E, F)$ *un opérateur positif,* $A \subset E$ *et* $B \subset F'$ *deux* *ensembles solides et bornés. Supposons que pour toute suite disjointe* $\{a_n\}$ *dans* A^+ *et toute suite disjointe* $\{b_n\}$ *dans* B^+ *nous ayons :*

(i) $\lim_{n\to\infty} T a_n = 0$ *faiblement dans* F,

(ii) $\lim_{n\to\infty} T' b_n = 0$ *préfaiblement dans* E', *et,*

(iii) $\lim_{n\to\infty} \langle T a_n, b_n \rangle = 0.$

Si de plus nous avons R, $S \in \mathscr{L}(E, F)$ *tels que* $|S| \leqq |R| \leqq T$ *dans* $\mathscr{L}(E, F'')$, *alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe des multiplicateurs* $M_1, \ldots, M_k$ *de* E *et des multiplicateurs* $L_1, \ldots, L_k$ *de* F *tels que si :*

$$S_0 = \sum_{i=1}^{k} L_i R M_i,$$

alors :

$$|\langle S a - S_0 a, b \rangle| \leqq \varepsilon \text{ pour tous } a \in A,\ b \in B.$$

3. Applications aux opérateurs Dunford-Pettis. — La première application au théorème 1 est le théorème suivant qui répond à la question de [2] sous des hypothèses plus faibles; notamment l'espace de départ est arbitraire.

Théorème 2. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach réticulés solides. Supposons que les intervalles d'ordre de* F *soient faiblement compacts. Soient* S, $T \in \mathscr{L}(E, F)$ *tels que* $0 \leqq S \leqq T$. *Alors si* T *est Dunford-Pettis, l'opérateur* S *est Dunford-Pettis aussi.*

Le théorème 1 nous permet aussi de prouver un résultat analogue au théorème 2 pour les opérateurs dit de Dunford-Pettis faibles. Pour cette classe d'opérateurs les espaces E et F sont arbitraires.

Théorème 3. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach réticulés solides et* S, $T \in \mathscr{L}(E, F)$ *tels que* $0 \leqq S \leqq T$. *Alors si* T *est Dunford-Pettis faible, l'opérateur* S *est aussi Dunford-Pettis faible.*

Dans [2] les auteurs montrent que si E est un espace de Banach réticulé solide, si $T \in \mathscr{L}(E, E)$ est positif et Dunford-Pettis, et si $0 \leqq S \leqq T$, alors S^3 est Dunford-Pettis. Le théorème suivant étend le résultat de [2].

Théorème 4. — *Soit* E *un espace de Banach réticulé solide,* $T : E \to E$ *un opérateur linéaire positif et Dunford-Pettis et soit* $S : E \to E$ *tel que* $0 \leqq S \leqq T$, *alors* S^2 *est Dunford-Pettis.*

4. Autres applications. — *Définition* 5. — Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire continu $T : X \to Y$ est dit *l_p-singulier* (resp.; *complémentablement l_p-singulier*) ($1 \leqq p < \infty$), s'il n'existe aucun sous-espace de dimension infinie X_0 de X qui soit isomorphe à l_p et tel que T restreint à X_0 soit un isomorphisme (resp.; T restreint à X_0 soit un isomorphisme et $T(X_0)$ soit complémenté dans Y).

Dans [6] Rosenthal a démontré que les opérateurs l_2-singuliers de L^1 dans L^1 sont exactement les opérateurs Dunford-Pettis. Les théorèmes suivants montrent que sous certaines conditions les opérateurs l_p-singuliers ($1 < p < \infty$) (resp.; complémentablement l_p-singuliers) forment un idéal d'ordre dans $\mathscr{L}_r(E, F)$.

Théorème 6. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach réticulés solides. Supposons les intervalles d'ordre de* F *faiblement compacts. Supposons* $1 < p < \infty$ *et supposons que* F *ne* *contient aucun sous-espace fermé réticulé qui soit isomorphe pour l'ordre à* l_p. *Alors les opérateurs* l_p*-singuliers forment un idéal d'ordre dans* $\mathscr{L}_r(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

THÉORÈME 7. — *Soit* E *et* F *deux espaces de Banach réticulés solides et supposons les intervalles d'ordre de* F *faiblement compacts. Supposons que* $1<p<\infty$ *et que, ou bien :*

(*a*) E *ne contient aucun sous-espace réticulé complémeneté isomorphe pour l'ordre à* l_p, *ou bien ;*

(*b*) F *ne contient aucun sous-espace réticulé complémenté isomorphe pour l'ordre à* l_p.

Alors les opérateurs complémentablement l_p*-singuliers dans* $\mathscr{L}_r(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *forment un idéal d'ordre.*

(*) Remise le 7 mars 1983.

[1] C. D. ALIPRANTIS et O. BURKINSHAW, *Math Z.*, 174, 1980, p. 289-298.
[2] C. D. ALIPRANTIS et O. BURKINSHAW, *Trans. Amer. Soc.*, 274, 1982, p. 227-238.
[3] P. C. DODDS et D. H. FREMLIN, *Is. J. Math.*, 34, 1979, p. 287-320.
[4] W. HAID, *Semesterbericht Funktionalanalysis*, Tubingen, Winter semester, 1981-1982.
[5] B. DE PAGTER, *The Components of a Positive Operator, Indag Math.* (à paraître).
[6] H. P. ROSENTHAL, *The Altgeld Book, Univ. of Illinois Functional Analysis Seminar*, 1975-1976.

N. J. K. et P. S. : *The University of Missouri-Columbia, Department of Mathematics, Columbia, Missouri* 65211.